JEAN-MARC EPELBAUM

Le Beau en mathématiques

Le titre de cette intervention, « Le Beau en mathématiques » a pu vous surprendre. On parle plus fréquemment du blocage en mathématiques ! Pourtant, on dit bien d'un théorème ou d'une démonstration qu'ils sont beaux. Mais il n'existe que très peu de livres sur ce sujet. Les recherches épistémologiques, en mathématiques, portent peu sur l'acte même du mathématicien. Pourtant, nous allons voir qu'il existe bien en mathématiques un instant d'illumination. Il est donc justifié de décortiquer le processus de l'invention. Pour comprendre où se situe cette illumination. Et constater qu'elle est le résultat d'un tri entre différentes idées, la beauté étant le critère de sélection. Elle méritera une définition rigoureuse.

La plupart des mathématiciens croit en l'existence d'un monde des mathématiques. Il y aurait un espace, un endroit, « quelque part », où se trouveraient les objets mathématiques. Les définitions, les théorèmes, les démonstrations elles-mêmes y seraient. Il faut reconnaître que cela donne aux chercheurs la force et le courage nécessaires à leur recherche. Il faut se rappeler, par exemple, que pour la démonstration du Théorème de Fermat, il aura fallu plus de trois siècles de travail et des dizaines de chercheurs. Il fallait vraiment qu'ils y croient !

En fait, l'analyse des mathématiques ne permet pas de déterminer si elles sont découvertes ou inventées. Les nombreux travaux des philosophes des mathématiques ne sont jamais venus à bout de cette question. Certains ont même montré qu'on ne pourrait pas trouver de réponse.

En revanche, la thèse de Cavaillès[181], en 1935, permet de comprendre la croyance des mathématiciens. En effet, il adopte une vision historique des mathématiques. Et il montre que les enchaînements que l'on constate sont *nécessaires*. Les mathématiciens inventeraient par nécessité un objet mathématique parce que, historiquement, celui-ci s'imposerait pour permettre l'invention des objets suivants. Les chercheurs se verraient donc imposer leurs inventions. Nous pouvons donc comprendre leur sentiment d'accéder à un monde des mathématiques.

Cavaillès ajoute que ces inventions sont imprévisibles. En effet, à partir d'un objet mathématique, plusieurs pourraient se déduire. On ne pourrait donc pas prévoir les inventions. Pourtant, certains mathématiciens ont une telle intuition qu'ils peuvent « voir » la suite de leurs travaux sans la connaître encore.

De ce point de vue, l'exemple de Fermat est assez extraordinaire. Chercheur amateur, il donne en 1640 une formule assez simple et il dit qu'il en possède une démonstration mais qu'il n'a pas la place pour l'écrire. Or, il a fallu attendre plusieurs siècles, jusqu'en 1995, pour qu'un chercheur universitaire trouve une démonstration.[182] Et sa démonstration tient sur plusieurs centaines de pages. Et elle contient des théorèmes que Fermat ne pouvait pas connaître. Il est donc plus que probable qu'il a eu une intuition de sa formule. Nous sommes ainsi au cœur de l'Euréka. Qu'est ce que c'est que cette intuition ?

Certains mathématiciens de renom ont raconté leur propre expérience de cette illumination. Une des plus connues est celle de Poincaré.[183] Il était en train de travailler sur un problème mathématique. Il n'en trouvait pas la solution.

181 Jean Cavaillès, Philosophie des sciences, *Œuvres complètes*, Hermann, Paris, 1994, p.29

182 Simon Singh, *Le dernier théorème de Fermat*, édition J C Lattès, Paris, 1998, p. 164

183 Henri Poincaré, *Science et Méthode*, Ed. E. Flammarion, Paris, 1934

Des amis ont alors réussi à l'entraîner avec eux dans une course géologique. Il raconte qu'il avait complètement oublié son problème. Ils vont pour prendre un bus ; au moment de monter sur le marche-pied, la solution à son problème lui est apparue. Elle lui paraissait soudainement évidente. Il venait d'entrouvrir ce qui deviendra une nouvelle voie de recherche.

Un autre chercheur, Connes, raconte qu'il conduisait en voiture ses enfants à l'école. Arrêté à un feu rouge, il a également vu une solution qu'il recherchait.

Il y a bien d'autres exemples. Cela pourrait paraître des histoires inventées, racontées après coup. J'ai personnellement vécu ce phénomène. Je travaillais sur une question de calcul. Assez technique. Or, depuis des années, j'expliquais à mes étudiants qu'il n'était pas possible de faire ce calcul-là dans une situation mathématique particulière. D'ailleurs, le programme officiel insiste pour que les enseignants signalent bien que ce calcul est impossible et serait une faute grave. Or, un matin, en prenant ma douche, m'est apparue une nouvelle formule qui rendait possible ce calcul.

D'après le Professeur Damasio[184], les recherches en neurobiologie n'expliqueront sans doute jamais l'origine de cette illumination. De son côté, Gilles Châtelet[185] montre que dans les livres de mathématiques, on ne dispose jamais des différentes phases de l'invention. Le chercheur donne son théorème et sa démonstration. Il n'explique jamais par quelles étapes il est passé pour arriver au résultat. Une analyse du travail du chercheur était donc nécessaire. C'est la raison pour laquelle nous avons mené une enquête internationale[186] auprès des mathématiciens-chercheurs dans les

184 Antonio R. Damasio, *L'erreur de Descartes*, Edition Odile Jacob, Paris, 1995

185 Gilles Châtelet, *Les enjeux du mobile - Mathématique, physique, philosophie* - Edition du Seuil, Paris, 1993

186 Jean-Marc Epelbaum, thèse de doctorat, Paris VIII, 13/10/2000, *La preuve par le Beau, examen critique de l'ontologie mathématique*

Universités des cinq continents.

Elle a confirmé le rôle de l'intuition et de l'illumination. Il restait à travailler sur le processus même de l'invention en mathématiques.

Il est facile d'établir que pratiquement toute la connaissance sur cette question repose sur le travail de Poincaré au début du vingtième siècle. En effet, le mathématicien français Gustave Choquet l'expose dans une Conférence[187] en 1994. Or, il connaît tous les grands mathématiciens du 20ème siècle. Et il s'exprime devant un auditoire averti. Il lui faut faire preuve d'une grande rigueur. Or, il ne donne en bibliographie que deux auteurs : Poincaré et Hadamard. Et le deuxième, pour l'essentiel, reprend les propos du premier. Par ailleurs, rien a été écrit sur cette question depuis cette Conférence.

Que dit Poincaré ? Il montre tout d'abord que les mathématiciens ont souvent une approche inductive dans leur recherche. Ils travaillent sur des cas particuliers. En quelque sorte, ils font des expériences. Ensuite, si c'est possible, ils en déduisent des théories générales.[188] C'est un point important. Les mathématiques fonctionnent de ce point de vue comme une science expérimentale.

Poincaré expose les quatre moments de la recherche en mathématiques : la préparation, souvent à partir de cas particuliers comme nous l'avons vu, ensuite l'incubation qui est une phase inconsciente.

Dans un troisième temps, l'illumination qui peut prendre plusieurs formes. Enfin une phase de vérification qui caractérise

---

187 Conférence de Gustave Choquet, *Les procédés de la découverte mathématique,* ENS rue d'Ulm, 16/04/1994,

188 Henri Poincaré, Science et méthode, *op. cit.*é, p. 49 « Les faits mathématiques dignes d'être étudiés, ce sont ceux qui, par leur analogie avec d'autres faits, sont susceptibles de nous conduire à la connaissance d'une loi mathématique de la même façon que les faits expérimentaux nous conduisent à la connaissance d'une loi physique. »

les mathématiques : rien est vrai tant que ce n'est pas rigoureusement démontré.

L'apport essentiel de Poincaré est qu'un travail non conscient intervient. Il faut le resituer dans son époque : 1908. Freud vient tout juste de publier, *Die Traumdeutung*, son livre fondateur. Il ne sera traduit en français qu'en 1926 sous le titre : *La Science des rêves.* Poincaré explique que des idées s'associent pour en produire une nouvelle. Il résume grossièrement son argumentation par la métaphore des *atomes crochus*.

Supposons que dans notre cerveau, chacune des idées soit représentée par un atome. Sans activité intellectuelle, ces atomes sont tous à l'arrêt. Comme accrochés au mur. En revanche, à l'état de repos apparent et de travail inconscient, quelques atomes sont détachés du mur et mis en mouvement. Ils sillonnent l'espace délimité par le cerveau. Leurs chocs mutuels peuvent alors produire un grand nombre de combinaisons nouvelles. On voit ainsi le rôle de la phase qui a précédé. Celle de préparation consciente. C'était de mobiliser certains atomes plutôt que d'autres. Ils sont choisis parce qu'on peut raisonnablement penser qu'ils seront nécessaires à la solution. Ainsi, dans la phase inconsciente, les atomes mobilisés subissent des chocs qui peuvent donner de nouvelles idées. Et notamment *la bonne combinaison.* Il ne nous reste plus qu'à chercher comment est choisie cette *bonne idée.* Parmi toutes les idées nouvelles.

Poincaré, de nouveau, nous donne le critère de choix : la beauté mathématique. Et Hadamard ajoute : « *Dans notre domaine mathématique, il semble que le sens de la beauté soit à peu près le seul utile.* »[189] Il souligne que le sentiment de beauté apparaît de manière systématique comme un lien nécessaire.

Nous arrivons à un résultat apparemment simple pour décrire l'Eureka en mathématiques : lors d'une phase de travail

189 Jacques Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique,* Ed. Blanchard, 1959, p. 120

inconscient, le cerveau fabriquerait de nombreuses combinaisons d'idées. L'une d'entre elles, « *la bonne combinaison* », serait retenue parce qu'elle éveillerait un sentiment de beauté chez le chercheur.

Reste à comprendre ce qu'est cette beauté en mathématiques puisqu'elle semble la clef de l'invention. Or, ni Poincaré, ni Hadamard, ni Choquet ne donnent une définition de la beauté en mathématiques.

Dans l'enquête internationale auprès des chercheurs, nous leur avons demandé s'ils utilisaient ce terme de beauté. 89% d'entre eux ont répondu oui. Mais dans une deuxième question, nous leur avons demandé d'en donner une définition. Et là, surprise ! Ces chercheurs, habituellement si rigoureux, ne connaissent pas de définition de la beauté en mathématiques. Ils ne peuvent que décrire certaines de ses propriétés : symétrie, harmonie, cohérence, simplicité, clarté, etc. Cela n'en fait pas une définition. L'un des chercheurs dit même : « *je considère que la beauté des méthodes ou des résultats est la propriété la plus importante. Mais je n'aimerais pas essayer d'analyser en quoi elle consiste.* »[190]

La démarche inductive du mathématicien nous a paru cohérente pour rechercher cette définition de la beauté en mathématiques. Cinq cas particuliers ont été étudiés : une enfant, un étudiant, un professeur de lycée, un grand mathématicien français et un des plus grands mathématiciens. Ces exemples couvrent l'intégralité des niveaux de connaissance en mathématiques.

L'enfant, Myriam, a six ans et demi. Au Cours Préparatoire, elle avait appris sans difficulté à manipuler les dix chiffres. Elle commence maintenant la deuxième année de l'école primaire. Elle va découvrir et apprendre les résultats des additions de ces chiffres. Pour cela, sa maîtresse lui fait construire le tableau en dix lignes et dix colonnes de toutes les additions possibles. Soit cent cases indépendantes et cent calculs séparés. Et autant de risques d'erreur

---

190 "*I regard the beauty of methods or results as the most important property. But I should not like to analyse exactly what is consists of*"

de calcul. D'ailleurs, comme la plupart des élèves de sa classe, elle fait des fautes et doit recommencer plusieurs fois ce tableau. Soudain, après avoir rempli les premières cases, elle s'aperçoit que les résultats des calculs sont liés les uns aux autres.

Pour chaque case, il suffit d'ajouter un au résultat de la case précédente. Il n'est plus nécessaire de faire les additions. Myriam regardait avec un certain émerveillement le tableau d'addition.

Bien entendu, l'enfant n'a pas dit que les mathématiques étaient belles. Mais elle a réinventé le raisonnement par récurrence. Et elle a pris conscience qu'il pourrait lui être utile pour la suite du travail. Cela lui suffisait pour ressentir un véritable plaisir.

Le deuxième cas particulier concerne un étudiant de dix-neuf ans. En résumé, ce garçon avait eu une mauvaise scolarité. Son niveau en mathématiques était très faible. Environ deux ans de retard scolaire. Pour préparer le baccalauréat, il s'inscrivit à un stage intensif de quinze jours de révision. De manière très rapide, il fallait en deux semaines revoir tout le programme d'une année. Autant dire qu'il ne pouvait pas tout comprendre et qu'il valait mieux décider de ne pas tout revoir. N'entrons pas ici dans des détails techniques. Disons simplement que le professeur a choisi de répondre à un type de questions qui *tombaient* systématiquement : une première partie A, assez technique, permettait de répondre aux questions d'une partie B.

Jusqu'au dernier jour du stage, l'étudiant subissait avec beaucoup de difficulté la technicité de la partie A. Sans en comprendre la raison d'être. Mais le dernier jour, comme dans une illumination, il comprit. « *C'est magnifique ! Grâce aux études successives* (la partie A)*, on a trouvé les variations de f* (la partie B) ». Il venait de comprendre le sens de ce problème en deux parties. La beauté ne résidait pas dans le problème lui-même mais dans la méthode qu'il signifiait. D'ailleurs, l'étudiant demanda à son professeur un problème sans la partie A. Il voulait lui-même réinventer les questions dont les réponses serviraient pour la partie B. Il venait de découvrir la beauté en mathématiques.

Le troisième cas particulier me concerne directement à un moment où, en 1985, j'étais professeur de lycée. J'avais voulu inventer une formule pour construire facilement, pour mes élèves, des exercices d'une forme particulière. Appelons-la de degré 2. Dans mon esprit, il ne s'agissait pas d'inventer un théorème.

Il ne s'agissait pas de recherche mathématique générale. Juste de degré 2. Or, quand j'ai obtenu cette formule et que je l'ai eue devant mes yeux, j'ai constaté une organisation des nombres qui me rappelait un autre type de situation. C'était surprenant et cela me donnait envie de poursuivre mes calculs au degré 3.

Sans en donner les détails, disons simplement qu'après une certaine manipulation, je suis retombé sur une organisation des nombres qui était le prolongement de la fois précédente. Le degré 3 était cohérent avec le degré 2. J'ai alors eu la conviction qu'il existait une formule générale, à tous les degrés. Il ne s'agissait encore que d'une conjecture puisque je n'avais rien démontré. Mais j'étais comme la plupart des mathématiciens. J'étais persuadé qu'il existait un monde des mathématiques où se trouverait « *ma* » formule. Et en effet, après une période un peu difficile de recherche, j'ai obtenu un résultat de degré n que j'ai pu démontrer. L'organisation des nombres au degré 2 m'avait permis de « *voir* », de « *prévoir* » une formule générale au degré n.

La suite est plus étonnante. Ayant obtenu ce premier résultat général, j'ai eu l'idée de travailler à ce que j'ai appelé une généralisation de la généralisation. Autrement dit, j'ai recherché une formule qui, apparemment, n'avait plus rien à voir avec ce qui avait été ma première idée. Or, après des mois de travail, j'ai effectivement obtenu une formule. D'ailleurs, elle était si générale qu'elle dépassait toute utilisation scolaire. Je reste aujourd'hui encore avec cette sensation curieuse que la première idée avait ouvert la voie vers la formule générale.

Le quatrième cas particulier de recherche de ce qu'est la beauté en mathématiques concerne le grand mathématicien français Gustave Choquet. Il est mondialement connu pour avoir inventé « *la théorie des capacités* ».

Membre de l'Académie des Sciences, son niveau de connaissance des mathématiques ne se mesure plus en nombre d'années d'étude. Il s'est attaqué aux plus grands problèmes mathématiques.

Il ne peut être question ici de présenter son travail. Disons simplement que la publication[191] qui nous intéresse nécessite au moins trois années d'études supérieures de mathématiques. Or, après de nombreuses pages de démonstration compliquée, il parvient à ce qu'il appelle « *une inégalité élégante* ». Il serait fastidieux d'expliquer le rôle de cette inégalité. Il suffira de retenir qu'elle aura été la première d'une succession d'autres inégalités qui le conduiront à sa théorie générale. Choquet conclut son Compte Rendu de recherche par ces mots : « *Le chemin pour obtenir cette preuve a été long… Pourtant, les détours, après coup, n'ont pas été inutiles puisque au cours de mon cheminement j'avais trouvé de nouvelles vérités, parfois inutiles pour le but fixé initialement, mais intéressantes pour elles-mêmes ou pour leur prolongement.* »

Le cinquième et dernier cas particulier concerne deux des plus grands mathématiciens : Cantor et Dedekind. Nous sommes au XIXème siècle. Ces deux chercheurs s'échangent leurs idées par lettres. Ils se posent des questions en fonction de l'avancement de leurs recherches propres. Et ils répondent aux sollicitations de leur correspondant. On peut y lire les plus grands problèmes sur la théorie des ensembles. Nous sommes là au sommet de la recherche en mathématiques. Et Cantor écrit à Dedekind, à propos d'une question essentielle : « *ce serait pourtant beau, si l'on pouvait y répondre* ». Or, nous savons depuis que la réponse dont il parle a ouvert la voie à des pans entiers de la recherche mathématique.

Ces cinq cas étudiés fournissent un grand nombre d'informations. Notamment que la beauté dépend du niveau de culture mathématique. Ce filtre étant démasqué, il devient possible de donner une définition de la beauté : ***en mathématiques, est***

---

[191] Gustave Choquet, Compte Rendu de l'Académie des Sciences, *La naissance de la théorie des capacités : réflexion sur une expérience personnelle*

beau ce qui mène à la connaissance.

Chaque mot de cette définition peut être confronté aux différents points évoqués jusque là. Ils ne cherchent pas à répondre au problème de la découverte ou de l'invention des mathématiques. Nous avons vu que ce n'était pas possible. En revanche, ils valident la propriété de la beauté de dépendre du niveau de connaissance de l'individu. En effet, l'enfant Myriam perçoit, sans en avoir conscience, l'apparition d'un mode de raisonnement. L'étudiant comprend l'existence d'une globalité d'un problème. Le professeur de mathématiques démarre une recherche très fructueuse à partir de l'esthétique visuelle de l'organisation des nombres dans une formule. Le mathématicien Choquet trouve qu'une première inégalité est élégante. Or, il ne peut pas encore savoir qu'elle sera à l'origine de toute une théorie qui le fera connaître. Enfin, avec Cantor, nous avons vu qu'au sommet de la recherche en mathématiques, de la même manière, la sensation de beauté apparaît à propos d'une question qui deviendra essentielle.

Cette définition de la beauté en mathématiques explique l'impression de découverte ressentie par les mathématiciens. En effet, la sensation de la beauté d'un objet mathématique apparaît au début d'un processus d'invention. Le chercheur entrevoit dès cet instant la fin de son travail. Mais il ne le sait pas car cela ne relève pas du domaine de la conscience. Dès lors, l'objet mathématique qu'il invente lui semble une découverte. Il croit qu'il est entré dans un nouveau monde.

La recherche sur le concept de beauté en mathématiques aura par ailleurs montré des propriétés exploitables dans l'enseignement. Il semble que certaines personnes ne ressentent pas la beauté en mathématiques. Doit-on continuer de les faire souffrir inutilement ? Inversement, un individu ne peut devenir un grand mathématicien que si l'un au moins de ses professeurs de mathématiques lui met en évidence cette beauté spécifique. Or, le deuxième cas particulier étudié, l'étudiant, démontre que la sensation de la beauté en mathématiques peut être transmise. Une refonte des programmes d'enseignement pourrait donc être envisagée. Elle reprendrait